ENSA d'Al-Hoceima — Année 2020/2021
CP-II, 2ème année, — Semestre 3
Algèbre Quadratique, — TD2

Série N^{o}2 : Réduction de matrices : Application à la résolution de systèmes différentiels

Exercice 1

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3 \text{ et } f(e_3) = e_1.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.
2. Décomposer $\mathbb{R}^3$ en une somme directe de sous-espaces vectoriels propres stables par f.

Exercice 2

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice A a une seule valeur propre double λ.

1. Montrer qu'on peut trouver une matrice B semblable à A égale à l'une des deux matrices suivantes : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
2. Calculer B^n.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
4. Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
4. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= u_n - w_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Calculer les valeurs propres de A. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Proposer une base de vecteurs propres de A.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une basee de vecteurs propres de A. Calculer P et P^{-1}, puis expliciter la matrice $B \in \mathbb{R}^{(3\times3)}$ définie par $B = P^{-1}AP$.
4. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.
5. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 6

On veut résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on peut écrire le système différentiel sous la forme : $X'(t) = A.X(t)$ où A est une matrice à déterminer.
2. Montrer que la matrice est inversible, puis trouver le polynôme caractéristique associé à A.
3. Trouver les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A.
4. Trouver les vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.
5. Trouver la solution générale $X(t)$, puis touver la solution $X(t)$ satisfaisant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.
6. Trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ tel que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ où $j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   Soient M, N et P des points dans le plan complexe d'afixes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, le traingle MNP est-il équilatéral ?

Exercice 7

Soit $(\mathcal{S})$ le systeme differentiel lineaire avec second membre

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) &= -3x(t) - 3y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) &= 2x(t) + 2y(t) - z(t) + 2e^t \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du systeme linéaire homogène associé à $(\mathcal{S})$.
2. Déterminer la solution particulière du système $(\mathcal{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ et $z(0) = 1$.
3. Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathcal{S})$.